日交研シリーズ A－942

道路ネットワークにおける混雑外部性の定量化：確率的進化ゲームモデルを用いた構造推定アプローチ

空間経済学による経済活動の立地と交通の諸問題の
研究プロジェクト

２０２６年１０月

公益社団法人日本交通政策研究会

1. “日交研シリーズ”は、公益社団法人 日本交通政策研究会の実施するプロジェクトの研究成果、本研究会の行う講演、座談会の記録、交通問題に関する内外文献の紹介、等々を印刷に付して順次刊行するものである。
2. シリーズはAよりEに至る5つの系列に分かれる。

   シリーズAは、本研究会のプロジェクトの成果である書き下ろし論文を収める。

   シリーズBは、シリーズAに対比して、より時論的、啓蒙的な視点に立つものであり、折にふれ、重要な問題を積極的にとりあげ、講演、座談会、討論会、その他の方法によってとりまとめたものを収める。

   シリーズCは、交通問題に関する内外の資料、文献の翻訳、紹介を内容とする。

   シリーズDは、本研究会会員が他の雑誌等に公けにした論文にして、本研究会の研究調査活動との関連において復刻の価値ありと認められるもののリプリントシリーズである。

   シリーズEは、本研究会が発表する政策上の諸提言を内容とする。
3. 論文等の内容についての責任はそれぞれの著者に存し、本研究会は責任を負わない。
4. 令和2年度以前のシリーズは印刷及び送料実費をもって希望の向きに頒布するものとする。

公益社団法人日本交通政策研究会

代表理事　竹　内　健　蔵

同　中　村　文　彦

令和2年度以前のシリーズの入手をご希望の向きは系列番号を明記の上、下記へお申し込み下さい。

〒102-0073 東京都千代田区九段北1-12-6
守住ビル　4階
公益社団法人日本交通政策研究会
電話（03）3263-1945（代表）
Fax （03）3234-4593
E-Mail:office@nikkoken.or.jp

日交研シリーズ A-942
令和 7 年度自主研究プロジェクト
空間経済学による経済活動の立地と交通の諸問題の研究
刊行：2026 年 10 月

道路ネットワークにおける混雑外部性の定量化：確率的進化ゲームモデルを用いた構造推定アプローチ

Quantifying congestion externalities in road networks: A structural estimation approach using stochastic evolutionary model

主査：高橋　孝明（東京大学空間情報科学研究センター・教授）
Takaaki Takahashi
研究担当者：高山　雄貴（東京科学大学 環境・社会理工学院 教授）
Yuki Takayama

要　旨

本研究では，旅行者が混雑の影響を受けながら旅行費用を最小化するように経路を戦略的に選択する交通量配分モデルの枠組みのもとで，リンクコスト関数および経路選択行動を特徴付ける構造パラメータを推定する．本モデルがポテンシャルゲームの構造を持つことを利用し，確率進化過程の定常分布から導かれる尤度に基づく最尤推定法を提案する．さらに，経路集合をあらかじめ固定する経路変数ベースの定式化を採用し，複数の構造パラメータを同時に推定する．提案手法は経路フローデータを必要とするが，実務において経路フローを直接取得することは困難である．そこで，比較的取得が容易な集計リンクフローと部分的なプローブ軌跡から経路フローを本モデルと整合的に復元する前処理パイプラインを併せて設計する．Sioux Falls ネットワーク上の数値実験により，プローブ回収率 10% 以上で実用的な推定精度（相対誤差 6.5% 以下）が達成可能であることを示した．推定されたパラメータを用いて評価した混雑料金課金は，パラメータの推定誤差を考慮しても，真値による料金とほぼ同等の効率改善を安定的にもたらすことが示された．

キーワード：交通量配分；ポテンシャルゲーム；確率進化動学；構造推定；混雑料金；プローブデータ
Keywords: traffic assignment; potential game; stochastic evolutionary dynamics; structural estimation; congestion pricing; probe data

目　　次

１章　はじめに……1

２章　モデル……4
2.1　基本的な仮定 ……4
2.2　均衡とポテンシャルゲーム ……5

３章　パラメータ推定……7
3.1　推定手法 ……7
3.2　データ ……10
3.3　推定結果 ……11

４章　混雑料金課金……15
4.1　最適混雑料金 ……15
4.2　推定パラメータに基づく混雑料金の効果……16

５章　不完全データ下での推定 ……18
5.1　前処理：最大エントロピー法とペナルティ法……18
5.2　プローブ観測モデルと経路充足率……20
5.3　推定結果と実用目安 ……22

６章　おわりに……25

研究メンバーおよび執筆者（敬称略・順不同）

研究メンバー

高橋　孝明（東京大学 空間情報科学研究センター 教授）
佐藤　泰裕（東京大学 大学院経済学研究科 教授）
金本　良嗣（政策研究大学院大学 客員教授）
田渕　隆俊（中央大学経済研究所 客員研究員）
浅田　義久（日本大学 経済学部 特任教授）
小川　　光（東京大学 大学院経済学研究科 教授）
吾郷　貴紀（専修大学 商学部 教授）
河端　瑞貴（慶応義塾大学 大学院経済学研究科 教授）
太田　　充（筑波大学 大学院システム情報工学研究科 准教授）
藤嶋　翔太（一橋大学 大学院経済学研究科 教授）
中川万理子（一橋大学 経済研究所 准教授）
大津　優貴（東京大学空間情報科学研究センター 講師）
相場　郁人（成蹊大学 経済学部 講師）
久住　竜也（大東文化大学 経済学部 講師）
中山　祥汰（東京大学大学院新領域創成科学研究科博士課程）

執筆者

藤嶋　翔太（一橋大学 大学院経済学研究科 教授）
酒井　高良（東京科学大学 環境・社会理工学院 特任助教）
高山　雄貴（東京科学大学 環境・社会理工学院 教授）

（2026 年 4 月現在）

1章　はじめに

多くの都市域では深刻な交通混雑問題が発生しており，通勤時の遅延を増大させるとともに，環境汚染を通じて居住者の生活の質や地域経済の効率性を損なっている．この広範かつ複雑な問題に対処するためには，混雑による外部費用を計測し，経路選択行動に起因する費用を利用者に公正に負担させることが不可欠である．この目的を達成するためには，リンクごとの交通量と費用を結びつけるリンクコスト関数を評価する必要がある．

本研究では，道路ネットワーク上の交通量配分を記述するモデルにおいて，このリンクコスト関数の構造パラメータを推定する手法を提案する．モデルでは，各起点・終点（OD）ペアに与えられた旅行者集団を考える．起点から終点へは一般に複数の経路が存在し，各旅行者は混雑によって増加する旅行費用を最小化するよう経路を選択する．本研究では，個々のプレイヤーの戦略ではなく，利用可能な経路上のプレイヤー分布のみに依存して利得が決まる集団ゲーム（population game）として問題を定式化する．

本ゲームは負の外部性のみを生み出すため，プレイヤーが均質である限り，ナッシュ均衡におけるリンクフローは一意である．さらに，本研究の交通量配分問題は，ナッシュ均衡を「ポテンシャル関数」と呼ばれる関数の最大化点の探索問題として帰着できる「ポテンシャルゲーム」（Rosenthal, 1973; Monderer and Shapley, 1996）の枠組みに含まれる．ポテンシャル関数の存在は均衡を特徴付けるだけでなく，後述するように，利用者の動学を記述する確率過程の定常分布を簡明な形で書き下す鍵となる．

本研究の構造推定は，観測された経路フローが必ずしも均衡状態にあることを前提としない点に特徴がある．具体的には，このポテンシャル関数を均衡状態の特徴付けではなく経路フローの生起確率を表す尤度関数の構成に活用することで，均衡を仮定せずパラメータを推定する．利用者の経路選択行動は確率進化動学として記述する．各期において一人の旅行者が戦略修正の機会を得て，指数修正プロトコル（exponential revision protocol）（Sandholm, 2010）の一種であるロジットプロトコル（logit protocol）に従って経路を更新する．すなわち，各経路の利得に応じたロジット型確率で新しい経路を選択する．この過程はマルコフ連鎖として構成され，その定常分布は，利得を通じた依存がポテンシャル関数に集約された閉じた形で書ける．本研究ではこの定常分布を尤度関数として用いる．

ポテンシャル関数を活用した推定はネットワークゲームの構造推定文献で広く知られている（例えば Nakajima, 2007; Mele, 2017; Hsieh et al., 2022）．しかし，定常分布の正規化定数の計算に関して，全状態にわたって値を合計する必要があるため計算量が膨大となり実行が困

難であるという課題がある．Mele (2017) は，Metropolis-Hastings アルゴリズムの拡張版を用いる Bayesian アプローチを採用することで，正規化定数の直接計算を回避している．

これに対し本研究では，プレイヤー数で規格化した対数尤度関数が，プレイヤー数を無限大とする極限（大規模極限）において，正規化定数を含まない極限関数に収束することに注目する．本研究で対象とする道路交通量配分問題ではプレイヤー数を十分に大きいとみなせるため，極限関数による尤度の近似が有効である．この極限関数の評価には正規化定数の計算は不要であり，ポテンシャル関数の最大化（サブ問題）のみを要するという特徴がある．このサブ問題の目的関数はエントロピー項により狭義凹であるため，サブ問題は単一の大域解を持つ．したがって，この極限関数を目的関数とする近似的な最尤法によりパラメータを推定する．最尤推定量の標準誤差はブートストラップ法を用いて評価する．

リンクコスト関数としては，交通計画学および交通評価の実務で広く用いられる Bureau of Public Roads（BPR）関数（例えば Sheffi, 1985; Small et al., 2024）を採用する．24 ノード 76 リンクから成るテストネットワーク（Sioux Falls ネットワーク）上で人工データを用いた予備的な数値実験を行ったところ，構造パラメータが高い精度で推定され，標準誤差もブートストラップ法によって得られることが確認できた．加えて，経路フローを完全には取得できない実務状況を想定し，集計リンクフローと部分プローブ軌跡から経路フローを本モデルと整合的に復元する前処理パイプラインを設計した．現実的なプローブ回収率においても実用的な推定精度が達成可能であり，推定パラメータに基づく混雑料金課金は，推定誤差を考慮しても，真値による料金とほぼ同等の効率改善を安定的にもたらすことが確認された．

混雑解消は重要な政策課題であり，交通・都市分野で多くの研究蓄積がある．Viauroux (2011) は，旅行者がトリップ回数と交通手段を決定するモデルを提案し，限界費用課金により社会全体の厚生が顕著に向上することを示した．このモデルでは経路・OD の違いは明示的にモデル化されず，混雑は他の旅行者の平均トリップ回数として集計的に表現される．Durrmeyer and Martinez (2022) は，旅行者が経路を所与として出発時刻と交通手段を選択するモデルを検討し，パリの通勤データを用いて道路課金や公共交通の便数調整の効果を所得階層別に分析している．Almagro et al. (2024) は，経路は外生的に与えられる（Google Maps の経路に従う）と仮定したうえで旅行者が交通手段を選択するモデルを検討し，シカゴのコミュニティエリアの交通データを用いて道路課金が外部費用を大きく低減しつつ公共交通サービス水準を改善し得ることを示した．これらの先行研究は，多様な交通手段や旅行者の異質

性を扱う一方で，本研究が中心的に扱う道路利用者の経路選択は考慮していない[1]．経路選択を無視すると，事前に計画された工事などの交通障害に応じて旅行者が経路を見直す可能性が捉えられず，交通流や混雑水準の予測精度が低下するおそれがある．また，混雑料金などの交通政策に対する旅行者の経路調整は全体の交通流や混雑水準に大きな影響を与えるため，経路選択の考慮は効果的な交通政策の立案に不可欠である．

本研究の構成は以下のとおりである．2 章ではモデルを示し，ポテンシャルゲームによるアプローチを導入する．3 章ではポテンシャル関数を用いた推定手法を提示し，テストデータを用いた予備的な推定結果を報告する．4 章では最適配分達成のための混雑料金を議論し，推定誤差が混雑料金効果に与える影響を評価する．5 章では，経路フローが直接観測できない実務的状況を想定し，集計リンクフローと部分プローブ軌跡から経路フローを復元する前処理パイプラインを提案し，プローブ回収率と推定精度の関係を検証する．6 章は結論を示す．データの詳細は付録 A に掲載する．

[1] Quantitative Spatial Economics（QSE）の文献では，混雑と経路選択の両方を扱った研究もいくつか存在する．Fajgelbaum and Schaal (2020) は，財の輸送時に混雑が発生する状況下での輸送セクターの経路選択を扱い，最適配分に焦点を当てる．Allen and Arkolakis (2022) は，住居から職場までの通勤行動を含む都市モデルにおける経路選択を扱い，シアトル道路網のデータを用いてネットワーク改善の厚生弾力性と投資収益性を評価している．これら QSE の研究と異なり，本研究の最終的な目的は構造パラメータの統計的推測である．

2章　モデル

2.1　基本的な仮定

旅行者が交通ネットワーク上で経路を選択するモデルを考える．ネットワークは，ノード集合 $\mathcal{N}$ とリンク集合 $\mathcal{L}$ から成る有向グラフとして表現される．$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}$ を旅行者の出発ノード集合，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$ を到着ノード集合とする．各 OD ペア $(r,s) \in \Omega \equiv \mathcal{R} \times \mathcal{S}$ は，ネットワーク上の経路集合 $\mathcal{K}^{rs}$ によって結ばれる．経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ は，起点 $r \in \mathcal{R}$ から終点 $s \in \mathcal{S}$ をつなぐリンク列である．

ノード $i \in \mathcal{N}$ からノード $j \in \mathcal{N}$ へのリンクをリンク (i,j) と表す．リンク (i,j) を通過する旅行費用は，そのリンクの交通量比率 y_{ij} のみに依存するとし，先行研究(例えば Sheffi, 1985; Fajgelbaum and Schaal 2020; Allen and Arkolakis 2022)にならい，リンクコスト関数 $t_{ij}(y_{ij})$ は非負・連続微分可能・狭義増加・凸とする．これにより，リンク (i,j) の交通量が大きいほど混雑による費用が増加する状況が表現される．

すべての旅行者は均質であり，起点から終点までの旅行費用を最小化するように経路を選択する．ネットワーク上の総旅行者数は $Q \in \mathbb{N}$ で固定され，十分大きいが有限とする．$q_Q^{rs} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_+$ を OD ペア (r,s) の旅行者比率とし（以下，OD ペア (r,s) の旅行者を「旅行者 (r,s)」と呼ぶ），$\sum_{(r,s)\in\Omega} q_Q^{rs} = 1$ を満たす．旅行者 (r,s) の総数は Qq_Q^{rs} である．また $f_{Qk}^{rs} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_+$ を経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ を選択する旅行者 (r,s) の比率とし，$\sum_{k\in\mathcal{K}^{rs}} f_{Qk}^{rs} = q_Q^{rs}$ を満たすとする．このときリンク (i,j) の交通量比率（以下，リンクフロー） $y_{ij} \in \mathbb{R}_+$ は次のように表せる：

$$
\begin{aligned}
&y_{ij}(\boldsymbol{f}_Q) = \sum_{(r,s)\in\Omega} \sum_{k\in\mathcal{K}^{rs}} f_{Qk}^{rs}\, \delta_{ij,k}^{rs}, \\
&\delta_{ij,k}^{rs} = \begin{cases} 1 & \text{リンク } (i,j) \text{ が経路 } k \in \mathcal{K}^{rs} \text{ を構成する場合,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで $\boldsymbol{f}_Q = (f_{Qk}^{rs})_{k\in\mathcal{K}^{rs},(r,s)\in\Omega}$．(1) は行列表記を用いて

$$
\boldsymbol{y}(\boldsymbol{f}_Q) = \Delta \boldsymbol{f}_Q \tag{2}
$$

と書ける．ただし $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{f}_Q) = (y_{ij}(\boldsymbol{f}_Q))_{(i,j)\in\mathcal{L}}$ であり，Δ は要素が $\delta_{ij,k}^{rs}$ の経路リンク接続行列である．

経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ の旅行費用 C_k^{rs} は，経路 k を構成するリンクの費用の和として与えられる：

$$C_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} t_{ij}\left(y_{ij}(\boldsymbol{f}_Q)\right)\delta_{ij,k}^{rs}. \tag{3}$$

2.2 均衡とポテンシャルゲーム

本モデルは旅行者(r,s)の戦略集合が経路集合 $\mathcal{K}^{rs}$で与えられる有限集団混雑ゲーム(Rosenthal, 1973)とみなせる．ここで

$$\mathcal{F}_Q^{rs} = \left\{ \boldsymbol{f}_Q^{rs} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{K}^{rs}|} \cap \frac{1}{\mathrm{Q}}\mathbb{Z}_+^{|\mathcal{K}^{rs}|} \;\middle|\; \textstyle\sum_{k\in\mathcal{K}^{rs}} f_{Qk}^{rs} = q_Q^{rs} \right\} \tag{4}$$

であり，$\boldsymbol{f}_Q^{rs} = (f_{Qk}^{rs})_{k\in\mathcal{K}^{rs}}$．各経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ を選択する旅行者 (r,s) の利得 π_k^{rs} を，経路 k の旅行費用の符号反転値

$$\pi_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q) = -C_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q) \quad \forall k \in \mathcal{K}^{rs},\ \forall (r,s) \in \Omega \tag{5}$$

として定義する．これらを並べたベクトル $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{f}_Q) = (\pi_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q))_{k,(r,s)}$ を利得関数と呼ぶ．Sandholm (2010, 2015) にならい，ゲームを利得関数 $\boldsymbol{\pi}$ で定め，以後本ゲームを $\boldsymbol{\pi}$ と表す．

ゲーム $\boldsymbol{\pi}$ のナッシュ均衡[2]は，どの旅行者も経路を変更しても利得を改善できない状態である．形式的には，経路フロー$\boldsymbol{f}_Q^* \in \mathcal{F}_Q \equiv \prod_{(r,s)\in\Omega}\mathcal{F}_Q^{rs}$ が均衡であるとは，すべての $(r,s) \in \Omega$ に対して

$$f_{Qk}^{rs*} > 0 \;\Rightarrow\; \pi_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q^*) \geq \pi_\ell^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q^* + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right) \quad \forall k,\ell \in \mathcal{K}^{rs} \tag{6}$$

が成り立つことをいう．$\boldsymbol{e}_k^{rs}$ は $k \in \mathcal{K}^{rs}$ に対応する要素のみが 1 となる単位ベクトルである．

本モデルの均衡を特徴付け，かつパラメータを推定するために，「ポテンシャルゲーム」の性質を用いる．関数 p_Q が次式

$$p_Q(\boldsymbol{f}_Q) - p_Q\left(\boldsymbol{f}_Q - \frac{1}{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_k^{rs}\right) = \pi_k^{rs}(\boldsymbol{f}_Q) \quad \forall \boldsymbol{f}_Q \in \mathcal{F}_Q, \forall k \in \mathcal{K}^{rs}, \forall (r,s) \in \Omega \tag{7}$$

を満たすとき，そのゲームをポテンシャルゲーム，p_Qをポテンシャル関数と呼ぶ．Rosenthal (1973) および Monderer and Shapley (1996) に示されるように，混雑ゲームは

$$p_Q(\boldsymbol{f}_Q) = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \sum_{z=1}^{Qy_{ij}(\boldsymbol{f}_Q)} t_{ij}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{Q}}\right) \tag{8}$$

[2] 交通工学の分野では，混雑ゲームのナッシュ均衡を利用者均衡（user equilibrium）と呼ぶ．

というポテンシャル関数を持つ．本モデルにおいても，このポテンシャル関数は(7)を満たすため，ゲーム $\boldsymbol{\pi}$ は有限集団ポテンシャルゲームである．

パラメータ推定のため，旅行者数を無限大に取った極限である「連続集団ゲーム」を考える．経路フローは $\boldsymbol{f} \in \mathcal{F} \equiv \prod_{(r,s)\in\Omega} \mathcal{F}^{rs}$ の要素であり，

$$\mathcal{F}^{rs} = \left\{ \boldsymbol{f}^{rs} \in \mathbb{R}_{+}^{|\mathcal{K}^{rs}|} \;\middle|\; \sum_{k\in\mathcal{K}^{rs}} f_k^{rs} = q^{rs} \right\} \tag{9}$$

である．ここで $q^{rs} \in \mathbb{R}_{+}$ は旅行者 (r,s) の比率を表す．Sandholm (2001)に示されるように，連続集団ポテンシャルゲームは有限集団ポテンシャルゲーム列の収束極限となる．具体的には，有限集団のポテンシャル関数 p_Q を旅行者数で規格化したもの p_Q/Q は，$Q \to \infty$ の極限で連続集団のポテンシャル関数

$$p(\boldsymbol{f}) = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \int_0^{y_{ij}(\boldsymbol{f})} t_{ij}(z)\,\mathrm{d}z \tag{10}$$

に一様収束する．

連続集団ポテンシャルゲームの均衡 $\boldsymbol{f}^* \in \mathcal{F}$ は，次のポテンシャル関数最大化問題

$$\max_{\boldsymbol{f}\in\mathcal{F}} p(\boldsymbol{f}) \tag{11}$$

の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 点として特徴付けられる．ここで，ポテンシャル関数 $p(\boldsymbol{f})$ は表面上は個々の経路選択に依存するように見えるが，実際にはリンクフロー $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{f})$ のみを通じて決まる．したがって $p(\boldsymbol{f})$ は，リンクフローを引数とする関数 $g(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{f}))$ として書き直せる：

$$g(\boldsymbol{y}) = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \int_0^{y_{ij}} t_{ij}(z)\,\mathrm{d}z. \tag{12}$$

t_{ij} が狭義増加かつ凸であることから，ヘッセ行列 $\nabla^2 g(\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ で負定値であり，$g(\boldsymbol{y})$ はリンクフロー $\boldsymbol{y}$ に関して狭義凹である．この性質は，以降の議論（サブ問題の解および混雑料金課金後のポテンシャル最大化点におけるリンクフローの一意性）における鍵となる．

なお，大規模ネットワークで(11)を直接扱う場合，集団状態 $\boldsymbol{f}$ の定義に全経路の列挙が必要となるが，本研究の数値実装では，計算可能な大きさの経路集合を事前に固定する経路変数ベースの定式化を採用する．

3章　パラメータ推定

本章では，第 2.2 節のポテンシャルゲームに確率進化動学を組み込むことで，リンクコスト関数の構造パラメータを推定する手法を提案する．本手法は，観測された経路フロー $\boldsymbol{f}$ が均衡状態であることを前提とせず，マルコフ連鎖の定常分布 $\nu_Q(\boldsymbol{f})$ をパラメータの尤度として用いる．これにより，観測された状態が均衡と一致していなくても，定常分布からの標本とみなせる限り，モデル化された利用者行動と整合的な構造パラメータを推定できる．

リンクコスト関数としては，交通評価の実務で広く用いられる Bureau of Public Roads（BPR）関数 (U.S. Bureau of Public Roads, 1964)

$$t_{ij}(y_{ij}) = \bar{t}_{ij}\left(1 + \alpha\left(\frac{Qy_{ij}}{\mu_{ij}}\right)^{\beta}\right) \quad \forall (i,j) \in \mathcal{L} \tag{13}$$

を採用する．ここで $\bar{t}_{ij}$ はリンク (i,j) の自由流旅行時間，μ_{ij} はリンク容量（台数），Qy_{ij} はリンク (i,j) の交通量（台数），α, β は推定対象のパラメータである．典型的には $\alpha = 0.15, \beta = 4.0$ という値が用いられる (例えば Sheffi, 1985; Small et al. 2024)．本章の目的は，観測された経路フロー $\{f_k^{rs}\}$ から，BPR パラメータ α, β と分散パラメータ η を同時に推定することである．経路フローが部分的にしか観測できない場合については 5 章で扱う．

3.1　推定手法

3.1.1　ロジット動学と尤度関数

理論モデルと観測データを結び付ける尤度関数を構築するため，旅行者が戦略を徐々に修正していく確率進化過程を考える．これはマルコフ連鎖として表現され，その定常分布が尤度関数となる．$\{F_Q^t\}_{t\geq 0}$ を $\mathcal{F}_Q$ 上のマルコフ連鎖とする．各旅行者は，互いに独立な単位強度の Poisson 過程に従って戦略修正の機会を得る．集計すると修正機会は強度 Q の Poisson 過程に従い，状態の期待滞在時間は $1/Q$ である．

旅行者は戦略修正の機会を得たとき，分散パラメータ $\eta > 0$ のロジットプロトコル (Sandholm, 2010, 11.5.2 節) に従って経路を更新する．現在経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ をとる旅行者 (r,s) が修正機会を得たとき，経路 $\ell \in \mathcal{K}^{rs}$ に切り替える確率は

$$\frac{\exp\left[\eta^{-1}\pi_\ell^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]}{\sum_{m\in\mathcal{K}^{rs}} \exp\left[\eta^{-1}\pi_m^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_m^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]} \tag{14}$$

で与えられる．τ_n を n 番目の修正機会が発生するランダムな時刻とする．経路 $k \in \mathcal{K}^{rs}$ をとる旅行者 (r,s) が修正機会を得る確率は f_{Qk}^{rs} であるから，$\{F_Q^{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の遷移確率は

$$\Pr\left[F_Q^{\tau_{n+1}} = \boldsymbol{f}_Q + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs}) \,\middle|\, F_Q^{\tau_n} = \boldsymbol{f}_Q\right] = f_{Qk}^{rs} \frac{\exp\left[\eta^{-1}\pi_\ell^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]}{\sum_{m\in\mathcal{K}^{rs}} \exp\left[\eta^{-1}\pi_m^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_m^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]}. \tag{15}$$

Sandholm (2010)の定理 11.5.12 によれば，$\{F_Q^{\tau_n}\}$ の定常分布は一意に

$$\nu_Q(\boldsymbol{f}_Q) = \frac{1}{\kappa_Q} \frac{Q!}{\prod_{(r,s)\in\Omega}\prod_{k\in\mathcal{K}^{rs}}(Qf_{Qk}^{rs})!} \exp[\eta^{-1} p_Q(\boldsymbol{f}_Q)] \tag{16}$$

で与えられる．ここで κ_Q は $\sum_{\boldsymbol{f}_Q\in\mathcal{F}_Q} \nu_Q(\boldsymbol{f}_Q) = 1$ を満たす正規化定数，$p_Q(\boldsymbol{f}_Q)$ はゲームのポテンシャル関数である．ν_Q は状態上の確率分布であり，これを尤度関数として用いる．

しかし，正規化定数 κ_Q の計算は全状態にわたる確率の総和を要求するため，計算量が膨大となり実行困難である．これはネットワークゲームの構造推定における既知の難点であり，Mele (2017)は Metropolis-Hastings アルゴリズムの拡張版を用いる Bayesian アプローチによってこの計算を回避している．

本研究の道路交通量配分の文脈では，総旅行者数を十分大きいとみなせる．このとき $\frac{\eta}{Q}\ln \nu_Q$ は $Q \to \infty$ で一様収束し，極限関数は正規化定数を含まない．具体的には，Sandholm (2010) の定理 12.2.3 により

$$\lim_{Q\to\infty} \max_{\boldsymbol{f}_Q\in\mathcal{F}_Q} \left|\frac{\eta}{Q}\ln \nu_Q(\boldsymbol{f}_Q) - \left\{\tilde{p}(\boldsymbol{f}_Q) - \max_{\boldsymbol{f}'\in\mathcal{F}} \tilde{p}(\boldsymbol{f}')\right\}\right| = 0, \tag{17}$$

ただし

$$\tilde{p}(\boldsymbol{f}) = p(\boldsymbol{f}) - \eta \sum_{(r,s)\in\Omega} \sum_{k\in\mathcal{K}^{rs}} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}. \tag{18}$$

右辺第 2 項はロジットプロトコルから生じる項で，特定経路に集中した戦略分布（経路フロー）にペナルティを与えるエントロピー項である．$\tilde{p}(\boldsymbol{f})$ を「拡張ポテンシャル関数」と呼ぶ．

したがって Q が十分大きいとき，対数尤度は漸近的に $\tilde{p}(\boldsymbol{f}_Q) - \max_{\boldsymbol{f}'\in\mathcal{F}} \tilde{p}(\boldsymbol{f}')$ に比例する．これにより，正規化定数の計算という問題は，拡張ポテンシャル関数の最大化という問題に置き換わる．元のポテンシャル関数 $p(\boldsymbol{f})$ は経路選択からリンクフローへの写像が縮退するため $\boldsymbol{f}$ について凹ではあるが狭義凹ではない．しかしエントロピー項は $\boldsymbol{f}$ について狭義凹であるため，拡張ポテンシャル関数 $\tilde{p}(\boldsymbol{f})$ は狭義凹となり，最大化点の一意性が保証される．

3.1.2　パラメータ化と識別性

上記のロジット動学に基づくと，本モデルは BPR 関数のパラメータ α, β に加え分散パラメータ η を持つ. ロジット型選択モデルの推定における一般的な課題は, 費用の絶対水準が未知の場合，η とポテンシャル関数内のパラメータが独立に識別できないことである.

しかし, 本研究の定式化では, ポテンシャル関数 $p(\boldsymbol{f})$ が (13) の BPR 関数の積分として与えられる．自由流旅行時間 $\bar{t}_{ij}$ はデータから直接観測できるため，これが旅行費用のスケールを定め，η をポテンシャル関数内のパラメータと分離して識別できる.

本研究では，推定対象パラメータをそのまま $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \eta)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3_+$ とし，(17) の極限関数（規格化対数尤度の極限）を目的関数

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{f}) = \tilde{p}(\boldsymbol{f}; \boldsymbol{\theta}) - \max_{\boldsymbol{f}' \in \mathcal{F}} \tilde{p}(\boldsymbol{f}'; \boldsymbol{\theta}) \tag{19}$$

として定義する．ここで $\tilde{p}(\boldsymbol{f}; \boldsymbol{\theta})$ は, (12)のポテンシャル p と経路フローのエントロピーから定まる拡張ポテンシャル関数の $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \eta)$ 依存性を明示した表記である．以降では, (19)の内側の最大化問題を「拡張ポテンシャル関数最大化問題」もしくは単に「サブ問題」と呼ぶ. 拡張ポテンシャルが経路フローに関して狭義凹であるため, サブ問題は一意解を持ち, $\Lambda(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{f})$ は$\boldsymbol{\theta}$ごとに一意に定まる. したがって, 推定値 $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \in \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \Lambda(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{f})$ は数値最適化により計算できる. 数値最適化においては, 正値制約 $\boldsymbol{\theta} > \mathbf{0}$ を自然に満たすために対数空間 $\boldsymbol{u} = (\ln\alpha, \ln\beta, \ln\eta)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$ への変数変換を行い，$\alpha \leq 10, \beta \leq 10$ の上限を課す.

3.1.3　ブートストラップ法

推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ の標準誤差はパラメトリック・ブートストラップ法で評価する. $b = 0,1,\dots,B$ ごとに, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ を代入した(16)に従うブートストラップ標本 $\boldsymbol{f}_Q^b \sim \hat{\nu}_Q$ を生成し，前項の最尤法によって推定値 $\boldsymbol{\theta}^b$ を計算する.

$\hat{\nu}_Q$ からの抽出は正規化定数の計算が困難であるため，定常分布 $\hat{\nu}_Q$ を持つマルコフ連鎖 (15)（$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ で評価したもの）を用いる．初期状態 $\boldsymbol{f}_Q^{(0)}$ から出発し，各 $t = 0,1,2,\dots$ について以下を実行する：

1. 集団分布 $\boldsymbol{f}_Q^{(t)}$ に従って現在経路 k を抽出し，対応する OD ペア (r,s) を特定する．これはランダムに修正機会を得る旅行者を選ぶ操作に対応する.
2. ロジット選択確率に従って新経路 $\ell \in \mathcal{K}^{rs}$ を抽出する．確率は(14)と同形である：

$$\frac{\exp\left[\hat{\eta}^{-1}\pi_\ell^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q^{(t)} + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]}{\sum_{m \in \mathcal{K}^{rs}} \exp\left[\hat{\eta}^{-1}\pi_m^{rs}\left(\boldsymbol{f}_Q^{(t)} + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_m^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})\right)\right]}.$$

3. 状態を $\boldsymbol{f}_Q^{(t+1)} = \boldsymbol{f}_Q^{(t)} + \frac{1}{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{e}_\ell^{rs} - \boldsymbol{e}_k^{rs})$ に更新する.

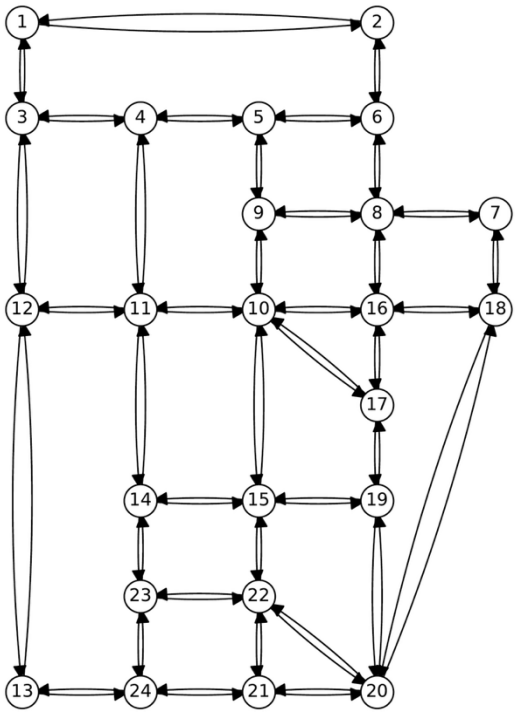


図 3.1　Sioux Falls ネットワーク

通常は定常分布への接近を促すバーンインを行うが，本研究では $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ におけるサブ問題の最大化点での経路フロー比率 $\boldsymbol{f}_Q$ を初期値とすることでバーンインを省略する．

各旅行者が平均して 1 回ずつ修正機会を得る時間スケールに対応させるため，Q 期間ごとに連鎖の軌跡をブートストラップ標本として採用する．具体的には $\boldsymbol{f}_Q^b = \boldsymbol{f}_Q^{(Q\times b)}$，$b = 0,1,\ldots,B$ とし，$B = 300$ とする（連鎖を計 $Q \times 300$ 期シミュレーションする）．

3.2　データ

数値実験には，Transportation Networks for Research Core Team (2024) が提供する Sioux Falls ネットワークデータを用いる（2024 年 9 月にアクセス）．Sioux Falls ネットワークは 24 ノード・76 リンク・528 OD ペアから構成され（図 3.1），リンク容量 $\{\mu_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{L}}$，自由流旅行時間 $\{\bar{t}_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{L}}$，および OD 需要 $\{Q^{rs}\}_{(r,s)\in\Omega}$[3]が与えられる．データセットの詳細は付録 A に示す．

構造パラメータの真値を $\boldsymbol{\theta}^{true} = (\alpha^*, \beta^*, \eta^*) = (0.15, 4.0, 1.0)$ と設定する．このとき，サブ

[3] OD 需要 Q^{rs} は $Q^{rs} = Qq^{rs}$（$Q = \sum_{(r,s)\in\Omega} Q^{rs}$）として比率 q^{rs} と対応する．

問題（拡張ポテンシャル関数最大化問題）の解として経路フロー $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{\theta}^{true})$ が一意に定まる．以下これを「真の経路フロー」と呼び，対応するリンクフロー $\bar{\boldsymbol{y}} = \Delta \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{\theta}^{true})$ を真のリンクフローと呼ぶ．真のリンクフローを図 3.2 に示す．後続の数値実験では，これらを観測対象（または観測対象から復元される対象）として用い，推定手法が真値 $\boldsymbol{\theta}^{true}$ を回復できるかを検証する．

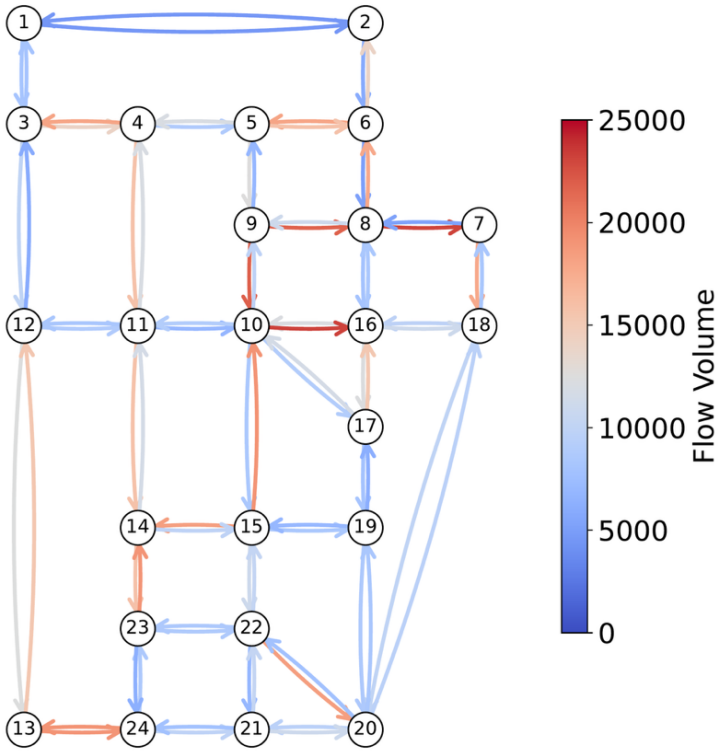


図 3.2　真のパラメータ $\boldsymbol{\theta}^{\text{true}}$ のもとでのリンクフロー $\bar{\boldsymbol{y}}$

3.3　推定結果

数値実装では経路フロー変数 f_k^{rs} を用いる経路変数ベースの定式化を採用し，経路集合は最短経路列挙[4]により事前に固定する．

3.3.1　完全データでの推定精度の検証

本項では，本定式化の妥当性を確認するため，第 3.2 節の真の経路フロー $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{\theta}^{true})$ がす

[4] 各 OD ペアについて自由流コストが最短経路の ρ 倍以内かつ上限 $k_{\max}$ 本までを残す．本実験では $\rho = 2.0$，$k_{\max} = 20$．Sioux Falls ネットワークでは合計 5,316 経路（平均 10.1 経路/OD ペア）が列挙される．

表 3.1　完全データでのパラメータ推定結果（相対誤差は(20)による無次元量）

パラメータ θ	真値 θ^{true}	推定値 $\hat{\theta}$	相対誤差 ε_θ
α	0.15	0.150005	3.12×10^{-5}
β	4.0	3.999950	1.25×10^{-5}
η	1.0	1.000048	4.83×10^{-5}

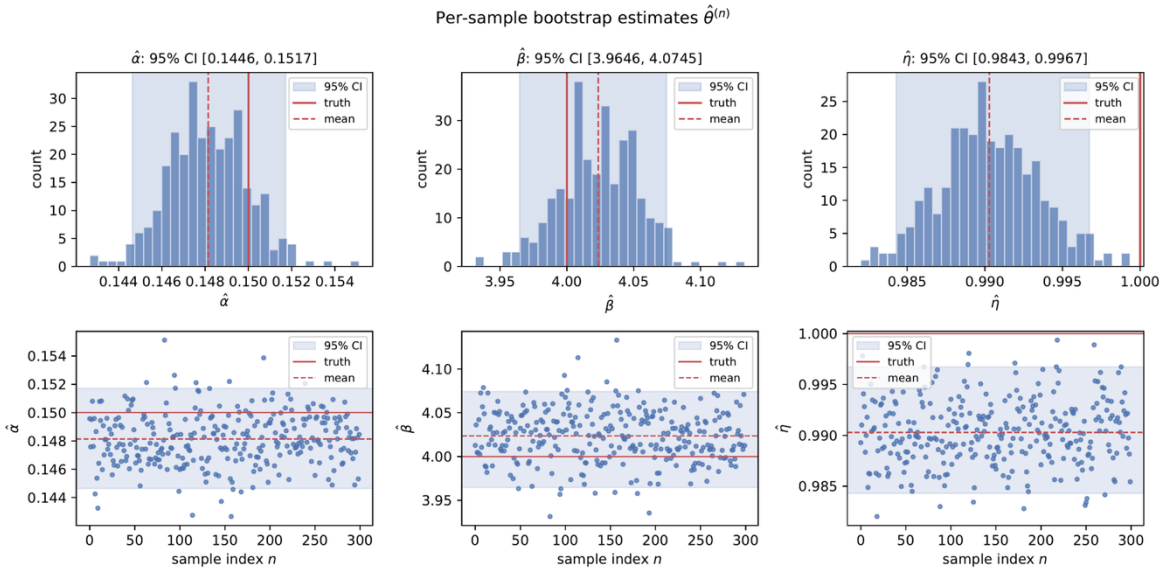


図 3.3　各標本における α, β, η の推定値
（上段：ヒストグラム＋95% CI 帯，下段：per-sample プロット）

べての OD ペアのすべての経路について観測されている理想的状況を想定する．これを観測データとし，初期値 $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \eta^{(0)}) = (0.5, 2.0, 2.0)$ から推定を行った結果，表 3.1 の推定値を得た．ここで各パラメータの相対誤差（無次元量）を

$$\varepsilon_\alpha \equiv \frac{|\hat{\alpha} - \alpha^*|}{\alpha^*}, \quad \varepsilon_\beta \equiv \frac{|\hat{\beta} - \beta^*|}{\beta^*}, \quad \varepsilon_\eta \equiv \frac{|\hat{\eta} - \eta^*|}{\eta^*} \tag{20}$$

と定義する．すなわち $\varepsilon = 10^{-5}$ は真値からの乖離が 0.001%，$\varepsilon = 0.05$ は 5% の乖離を意味する．本実験ではすべてのパラメータについて $\varepsilon \leq 5 \times 10^{-5}$ の回復が達成され，本定式化が完全データのもとで真値を高精度に回復できることが確認された．

真値において目的関数値 $\Lambda(\boldsymbol{\theta}^{true} \mid \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{\theta}^{true})) = 0$ が機械精度の範囲で成立すること，および解析的勾配と有限差分勾配が高精度に一致することも併せて確認した．

表 3.2　ブートストラップ推定値の要約統計量．95% CI はパーセンタイル法による．

パラメータ	真値	平均	SE	中央値	95% CI 下限	95% CI 上限
α	0.1500	0.1481	0.0019	0.1481	0.1446	0.1517
β	4.0000	4.0236	0.0297	4.0252	3.9646	4.0745
η	1.0000	0.9903	0.0032	0.9901	0.9843	0.9967

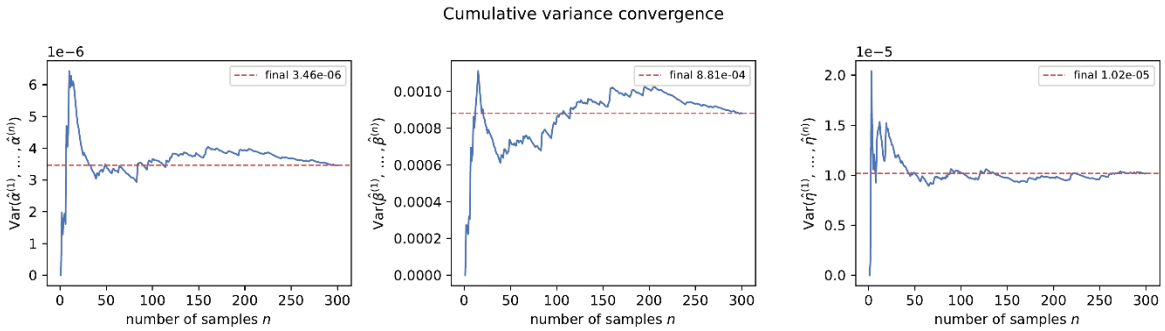


図 3.4　各パラメータの累積分散の収束曲線

3.3.2　ブートストラップによる標準誤差の評価

総需要量 $Q = \sum_{(r,s)\in\Omega} Q^{rs} = 360{,}600$ を有効集団サイズとして用い，真値 $\boldsymbol{\theta}^{true}$ のもとで第 3.1 節の確率進化動学を $Q \times 300$ 期シミュレートして 300 個のブートストラップ標本を生成した（標本間隔 Q）．各標本に対しパラメータ推定問題を解き，300 組の推定値 $(\alpha^{(b)}, \beta^{(b)}, \eta^{(b)})_{b=1}^{300}$ を得た．

各標本における α, β, η の推定値とヒストグラムを図 3.3 に，累積分散の収束過程を図 3.4 に示す．いずれのパラメータについても推定値は真値の近傍に分布し，累積分散は 300 標本までに収束している（図 3.4）．推定結果の要約を表 3.2 に示す．3 つのパラメータすべてについて，標準誤差は真値に比べて小さい（表 3.2）．ただし，分散パラメータ η の推定値はわずかに小さい側に偏っており，真値 1.0 は 95% CI の外にある（表 3.2）．

$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$ の同時分布（corner plot）を図 3.5 に示す．対角線上の周辺ヒストグラムから，いずれの推定値分布も単峰型であることが分かる．赤星印・赤破線は真値，灰色帯は 95%パーセンタイル信頼区間を表す．300 標本のリンクフローのばらつき（変動係数）は平均約 3.3×10^{-3}，最大でも約 1.0×10^{-2} にとどまり，マルコフ連鎖が定常分布近傍を標本化していることと整合的である．

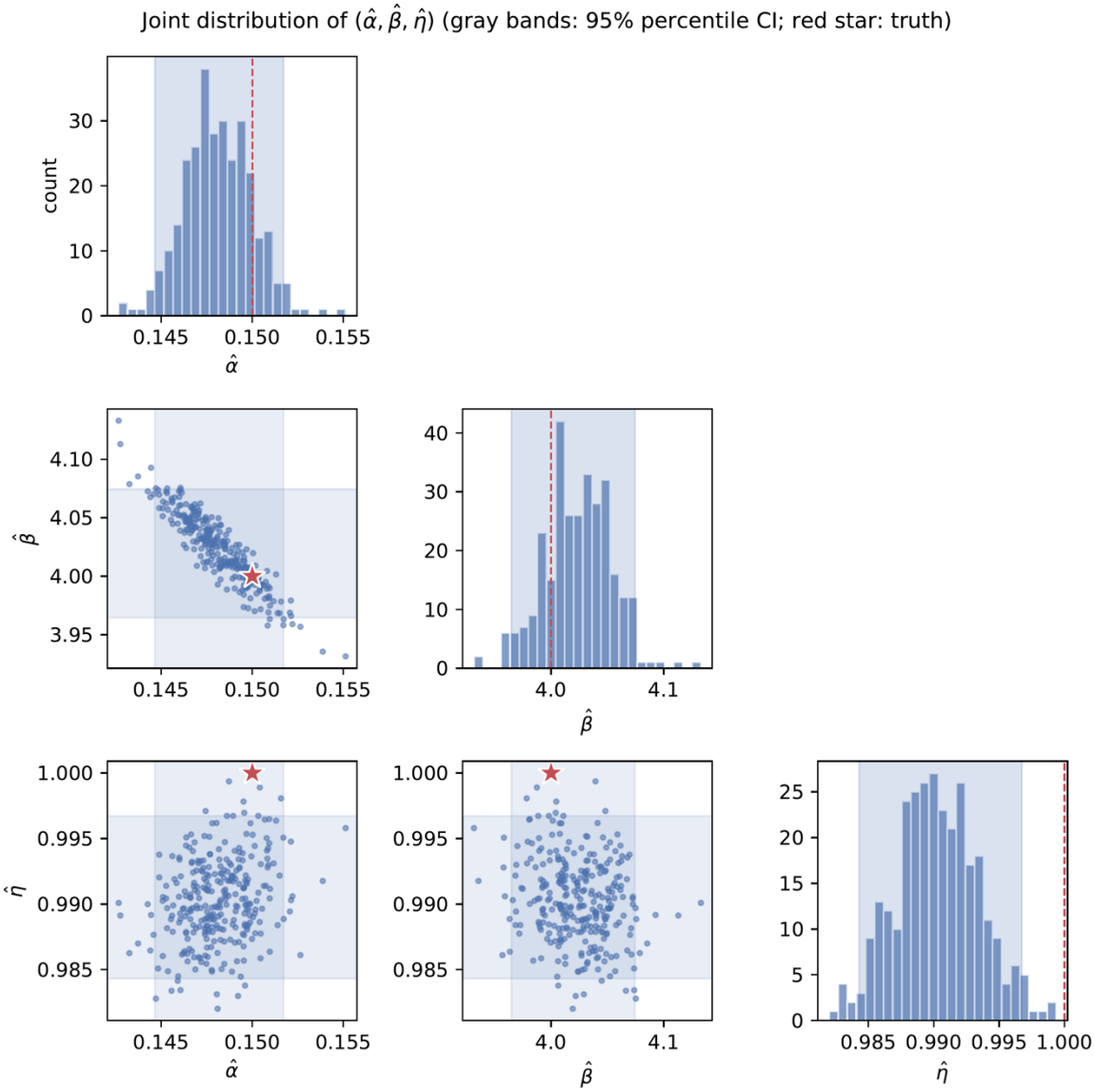


図 3.5　$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$ の同時分布（corner plot）

4章　混雑料金課金

本モデルにおいて利用者の経路選択行動から自然に到達するリンクフロー（拡張ポテンシャル関数の最大化点におけるリンクフロー）は，混雑による負の外部性の存在により一般には社会最適とは一致しない．プランナーは混雑料金を導入してこの外部性を内部化し，混雑に起因する社会費用の低減を図る．しかし，混雑の外部費用の評価に誤差があると，混雑料金課金は最適配分を達成できない可能性がある．

本章では，第3章で得られた推定パラメータに基づく混雑料金の有効性を評価し，本手法の精度と実用性を示す．第4.1節では最適混雑料金の性質を検討し，第4.2節では誤差を含む推定パラメータを用いて混雑料金を設定した場合の効果を解析する．前章までと同様に Q は十分大きいとし，連続集団ゲームとして扱う．

4.1　最適混雑料金

総旅行費用の符号反転値

$$G(\boldsymbol{y}) = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} t_{ij}\,(y_{ij})\cdot y_{ij} \tag{21}$$

を最大化（総旅行費用を最小化）する社会最適のリンクフローを $\boldsymbol{y}^o = (y_{ij}^o)_{(i,j)\in\mathcal{L}}$ とする[5]．混雑外部性を内部化する料金は，各リンク $(i,j)\in\mathcal{L}$ に対して限界外部費用に等しい水準

$$\tau_{ij}^o = t'_{ij}(y_{ij}^o)\cdot y_{ij}^o \tag{22}$$

として与えられる（$t'_{ij}(y) = \mathrm{d}t_{ij}(y)/\mathrm{d}y$）．これは決定論的な経路選択（$\eta\to 0$）のもとで社会最適 $\boldsymbol{y}^o$ を実現する料金である．この料金 $\boldsymbol{\tau}^o = (\tau_{ij}^o)_{(i,j)\in\mathcal{L}}$ を各リンクコストに加えた課金後の拡張ポテンシャル関数は，以下で与えられる：

$$\tilde{p}_{\boldsymbol{\tau}^o}(\boldsymbol{f}) = \tilde{p}(\boldsymbol{f}) - \sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \tau_{ij}^o\, y_{ij}(\boldsymbol{f}). \tag{23}$$

本研究の数値実験では，社会最適 $\boldsymbol{y}^o$ および課金後の $\tilde{p}_{\boldsymbol{\tau}^o}$ の最大化点におけるリンクフローを，それぞれ次の経路フロー上の最大化問題を解いて求める：

$$\max_{\boldsymbol{f}\in\mathcal{F}} G\big(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{f})\big), \tag{24a}$$

$$\max_{\boldsymbol{f}\in\mathcal{F}} \tilde{p}_{\boldsymbol{\tau}^o}(\boldsymbol{f}). \tag{24b}$$

[5] t_{ij} が狭義増加かつ凸であるため G は狭義凹となり，$\boldsymbol{y}^o$ は一意に定まる．

4.2　推定パラメータに基づく混雑料金の効果

最適混雑料金の設定には，外部費用を定めるリンクコスト関数パラメータの正確な値が必要である．わずかな推定誤差であっても料金水準を非最適なものにし，総旅行費用の改善が得られない料金を生成し得る．このため，混雑料金導入による総旅行費用の改善度は推定精度の実用的な指標となる：推定が十分正確であれば，改善率は真値による料金での水準に近づく．

本解析では，第 3 章で得られた 300 個のブートストラップ推定パラメータを用いて，総旅行費用改善率の分布を計算する．この分布は推定値のばらつきが料金の効果に及ぼす影響を反映し，推定パラメータに基づく混雑料金の実用性に関する知見を与える．

各ブートストラップ標本bにおいて，プランナーが推定パラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(b)} = (\alpha^{(b)}, \beta^{(b)})$ を用いて混雑料金 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ を設定すると仮定し，真のパラメータは $\boldsymbol{\theta}^{true}$ とする．具体的には，プランナーは $\boldsymbol{\theta}^{(b)}$ のもとで (24a) の社会最適問題を解いて最適リンクフロー $\boldsymbol{y}^{o}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ を得て，

$$\tau_{ij}(\boldsymbol{\theta}^{(b)}) = \bar{t}_{ij}\,\alpha^{(b)}\beta^{(b)}\left(\frac{Q y_{ij}^{o}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})}{\mu_{ij}}\right)^{\beta^{(b)}} \tag{25}$$

を料金として設定する．旅行者は真値 $\boldsymbol{\theta}^{true}$ のもとで旅行費用を最小化するため，実際の最適料金は $\boldsymbol{\tau}^{o} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{true})$ であり $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ ではない．したがって，プランナーは社会最適を達成できない．

この設定下で，混雑料金 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ 導入による総旅行費用の変化を評価する．真値 $\boldsymbol{\theta}^{true}$ のもとで料金 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ を課したときの拡張ポテンシャル関数 $\tilde{p}_{\boldsymbol{\tau}(\theta^{(b)})}$ の最大化点におけるリンクフローを $\boldsymbol{y}^{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ と書く．このときの総旅行費用は

$$T(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} t_{ij}\,(y_{ij}^{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)}))\cdot y_{ij}^{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)}) \tag{26}$$

である．料金未導入時の総旅行費用を $T(\mathbf{0})$ とし，b 番目のブートストラップ標本における料金 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})$ 導入による総旅行費用変化率を

$$R^{(b)} = \frac{T(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{(b)})) - T(\mathbf{0})}{T(\mathbf{0})} \times 100 \tag{27}$$

と定義する．真値による料金 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{true})$ 導入時の変化率は

$$R^{*} = \frac{T(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}^{true})) - T(\mathbf{0})}{T(\mathbf{0})} \times 100 \tag{28}$$

である．

図 4.1 にすべてのブートストラップ標本における $R^{(b)}$ の分布を散布図で示す（左：全 300

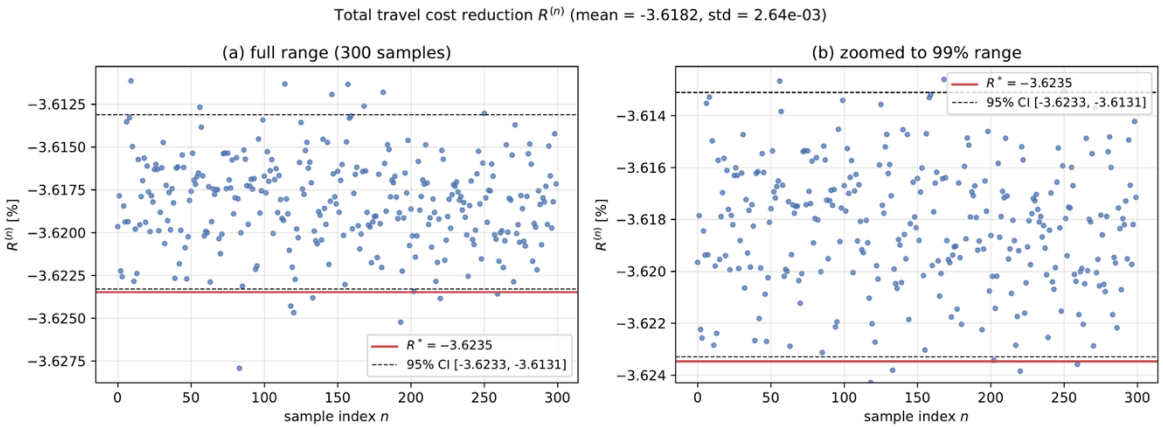


図 4.1　推定パラメータに基づく混雑料金の効率性

標本，右 : 99% パーセンタイル範囲に拡大）．赤線は真値による料金での R^*，黒破線は $R^{(b)}$ の 95% パーセンタイル CI を表す．推定パラメータに基づく料金導入による総旅行費用の変化率は平均 -3.6182%（3.62%の低減，標準偏差 2.64×10^{-3}）であった．真値による料金導入時の変化率は $R^* = -3.6235\%$ であり，$R^{(b)}$ の 95% CI は $[-, 3.6233\ -\ 3.6131]$ と狭い帯域に収まる．この結果は，推定パラメータに基づく混雑料金が，真値による料金とほぼ同等の効率改善を安定的にもたらすことを示している．

5章　不完全データ下での推定

第 3.3 節では，第 3.2 節で生成した真の経路フロー $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{\theta}^{true})$ がすべて観測される完全データの状況を想定した．しかし実務では経路フローを直接かつ完全に取得することは困難である．本章では，経路フローに比べ取得が容易な次の 2 種類のデータの組合せが利用可能な状況を想定する：

- **集計リンクフロー $\bar{\boldsymbol{y}}$**
  交通量感知器等から取得される．本章では理論的整理のため，全リンクで観測されているとする．
- **部分プローブ軌跡**
  プローブ車両の走行軌跡として取得されるが，回収率は限定的（部分観測）．

このような状況下で，集計リンクフローと部分プローブ軌跡を本モデルと整合的に経路フローに変換する前処理パイプラインを設計し，プローブ回収率と推定精度の関係を体系的に検証する．前処理パイプラインは以下の 2 段階で構成される：

- **Stage 1：プローブデータからの経路集合構成**
  プローブ車両の軌跡データから，各 OD ペア (r,s) で観測された経路を抽出し，経路集合 $\{\widehat{\mathcal{K}}^{rs}\}$ および接続行列 $\widetilde{\Delta}$ を構成する．プローブ回収率が低い場合，一部の OD ペアで発見経路が，既知とする最短経路（第 5.2 節）1 本のみとなることがある．
- **Stage 2：最大エントロピー（Maximum Entropy, ME）による経路フロー復元**
  集計リンクフロー $\bar{\boldsymbol{y}}$ と経路集合 $\{\widehat{\mathcal{K}}^{rs}\}$ を入力として ME 問題を解き，経路フロー $\boldsymbol{f}^{ME}$ を復元する．

5.1　前処理：最大エントロピー法とペナルティ法

5.1.1　エントロピー最大化による経路フロー復元

リンクフロー $\boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{y}}$ を所与として，拡張ポテンシャル関数最大化問題（サブ問題；第 3.1 節）の目的関数に $\widetilde{\Delta}\boldsymbol{f}=\bar{\boldsymbol{y}}$ の制約を課した条件付き問題を考えると，これは次の最大エントロピー問題に自然に帰着する：

$$\max_{\boldsymbol{f}\geq 0} \sum_{(r,s)\in\Omega} q^{rs}\ H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$
$$\text{s.t. } \tilde{\Delta}\boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \sum_{k\in\tilde{\mathcal{K}}^{rs}} f_k^{rs} = q^{rs} \quad \forall (r,s)\in\Omega, \tag{29}$$

ここで $H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs}) = -\sum_{k\in\tilde{\mathcal{K}}^{rs}} (f_k^{rs}/q^{rs})\ln(f_k^{rs}/q^{rs})$ は OD ペア (r,s) のエントロピーである．この導出から，本前処理の正当性を保証する次の性質が直ちに得られる．第一に，拡張ポテンシャル関数最大化問題においてリンクフローを $\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}$ に固定した条件付き問題は，ME 問題(29)に帰着する（条件付き問題の同値性）．第二に，ME 問題の解 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{ME}}$ はパラメータ η に依存しない（η 独立性）．第三に，ME 問題の KKT 条件は，拡張ポテンシャル関数最大化問題の KKT 条件においてラグランジュ乗数を $\lambda_{ij} = -t_{ij}(\bar{y}_{ij})/\eta$ と置いた場合と一致する（KKT 対応）．第四に，経路集合 $\{\tilde{\mathcal{K}}^{rs}\}$ が完全（脚注 4 の列挙経路集合に一致）であり，$\bar{\boldsymbol{y}}$ がパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ のもとでの拡張ポテンシャル関数の最大化点におけるリンクフローであるとき，$\boldsymbol{f}^{ME} = \boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{\theta})$ が成立する（モデル整合性）．

特に「モデル整合性」は推定枠組みの正当性の鍵となる：経路集合が完全であれば ME 前処理は本モデルの仮定のもとで真の経路フローを再現し，「η 独立性」より前処理は η に依存しないため，推定と前処理の間に循環依存が生じない．ME 問題の解はロジット形式

$$f_k^{rs,\mathrm{ME}} = q^{rs}\cdot \frac{\exp\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \lambda_{ij}\,\delta_{ij,k}^{rs}\right)}{\sum_{k'\in\tilde{\mathcal{K}}^{rs}} \exp\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} \lambda_{ij}\,\delta_{ij,k'}^{rs}\right)} \tag{30}$$

をとる．

5.1.2　経路集合が不完全な場合のペナルティ法

プローブ回収率が低い場合，発見された経路集合 $\{\tilde{\mathcal{K}}^{rs}\}$ が不完全であり，リンク制約 $\tilde{\Delta}\boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{y}}$ が実行不可能となりうる．すなわち列挙された経路の組み合せでは観測リンクフローを正確に再現できない場合がある．この問題に対処するため，リンク制約をペナルティ項として緩和する：

$$\min_{\boldsymbol{f}\geq \boldsymbol{0}} \sum_{(r,s)} \sum_{k\in\tilde{\mathcal{K}}^{rs}} f_k^{rs}\ln\frac{f_k^{rs}}{q^{rs}} + \frac{\sigma}{2}\,\|\,\tilde{\Delta}\boldsymbol{f} - \bar{\boldsymbol{y}}\,\|^2$$
$$\text{s.t.} \sum_{k\in\tilde{\mathcal{K}}^{rs}} f_k^{rs} = q^{rs} \quad \forall (r,s)\in\Omega, \tag{31}$$

ここで $\sigma > 0$ はペナルティパラメータである．本研究では $\sigma = 10000$とし，逐次平均法（MSA）により最大 3,000 反復（収束閾値 10^{-10}）で計算する．

5.2　プローブ観測モデルと経路充足率

各車両が互いに独立に確率 $r \in (0, 1]$ でプローブ車両であるとし，r をプローブ回収率と呼ぶ．このとき，フロー Qf_k を持つ経路 k が少なくとも 1 台のプローブ車両によって観測される確率は

$$P(\text{discovered}) = 1 - (1 - r)^{Qf_k} \tag{32}$$

である[6]．各 OD ペアの最短経路を事前知識として常に経路集合に含めることで，r がゼロに近い場合でも各 OD ペアについて最低 1 本の経路が保証される．図 5.1 に経路フロー Qf_k と発見確率の関係を示す．高フロー経路は低プローブ回収率でも高確率で発見される．これが不完全データにおいても推定が可能となる鍵である．

実際にプローブ回収率 r を変化させて経路発見シミュレーションを行うと，経路充足率（完全経路集合に対する発見経路の割合）は図 5.2 および表 5.1 に示すような関係となる．代表的な値として，$r = 0.01$（1%）で経路充足率 15%，$r = 0.10$（10%）で 23%，$r = 0.50$（50%）で 33%，$r = 1.00$（100%）で当然 100% である．経路充足率は回収率に対して対数的にしか増加しないが，高フロー経路ほど優先的に発見されるため，発見経路が運ぶフローの全フローに占める割合（フロー加重の経路カバー率）は経路充足率よりも遥かに高くなる．

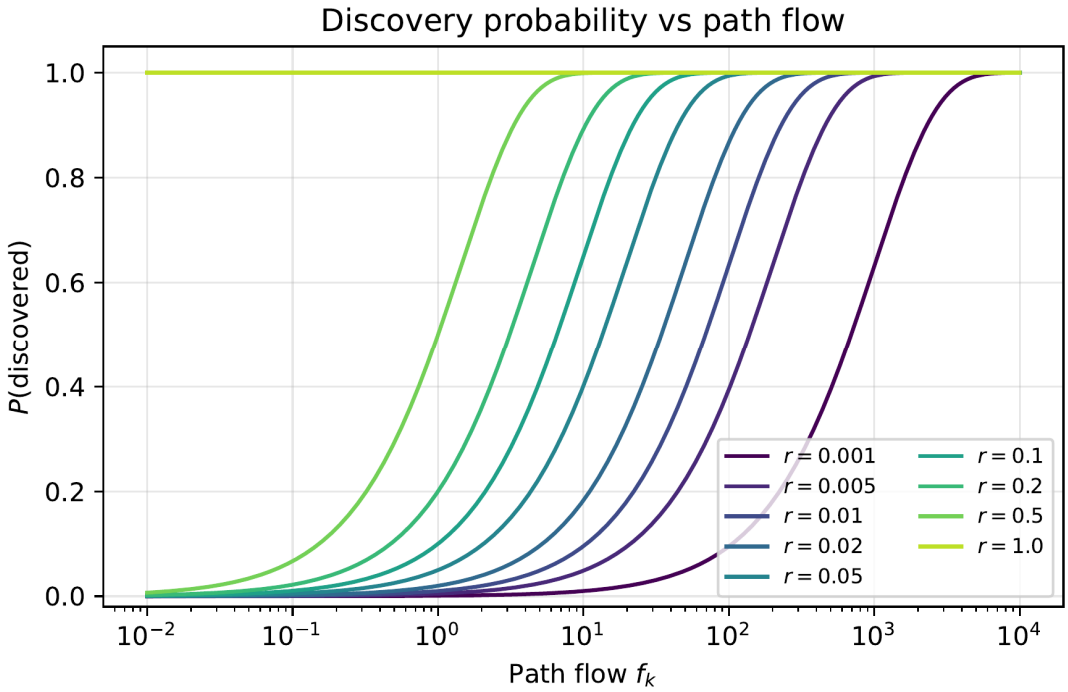


図 5.1　経路フロー f_k と発見確率の関係（各プローブ回収率 r）

[6] これは Qf_k 台の車両のうち少なくとも 1 台がプローブ車両である確率と解釈できる．

表 5.1　部分プローブデータでの推定結果

（$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\eta$ は(20)で定義される相対誤差，無次元量．リンク残差は $\| \tilde{\Delta}\boldsymbol{f}^{ME} - \bar{\boldsymbol{y}} \|_2 / \| \bar{\boldsymbol{y}} \|_2$）

r	充足率	経路/OD	リンク残差	ε_α	ε_β	ε_η
0.001	11.0%	1.1	1.53×10^{-1}	$6.57 \times 10^{+1}$	1.50×10^{0}	7.97×10^{-1}
0.005	13.2%	1.3	1.59×10^{-2}	5.43×10^{-1}	8.25×10^{-1}	1.91×10^{-1}
0.010	14.7%	1.5	1.25×10^{-3}	2.56×10^{-1}	2.88×10^{-1}	3.43×10^{-1}
0.020	16.9%	1.7	5.86×10^{-4}	1.11×10^{-1}	1.18×10^{-1}	2.71×10^{-1}
0.050	20.4%	2.0	7.22×10^{-4}	7.91×10^{-2}	5.62×10^{-2}	1.09×10^{-1}
0.100	23.2%	2.3	8.82×10^{-4}	6.31×10^{-2}	3.85×10^{-2}	4.81×10^{-2}
0.200	27.0%	2.7	9.84×10^{-4}	4.54×10^{-2}	2.43×10^{-2}	7.99×10^{-3}
0.500	32.8%	3.3	1.07×10^{-3}	3.59×10^{-2}	1.88×10^{-2}	9.11×10^{-3}
1.000	100.0%	10.1	1.12×10^{-3}	3.46×10^{-2}	1.67×10^{-2}	2.74×10^{-2}

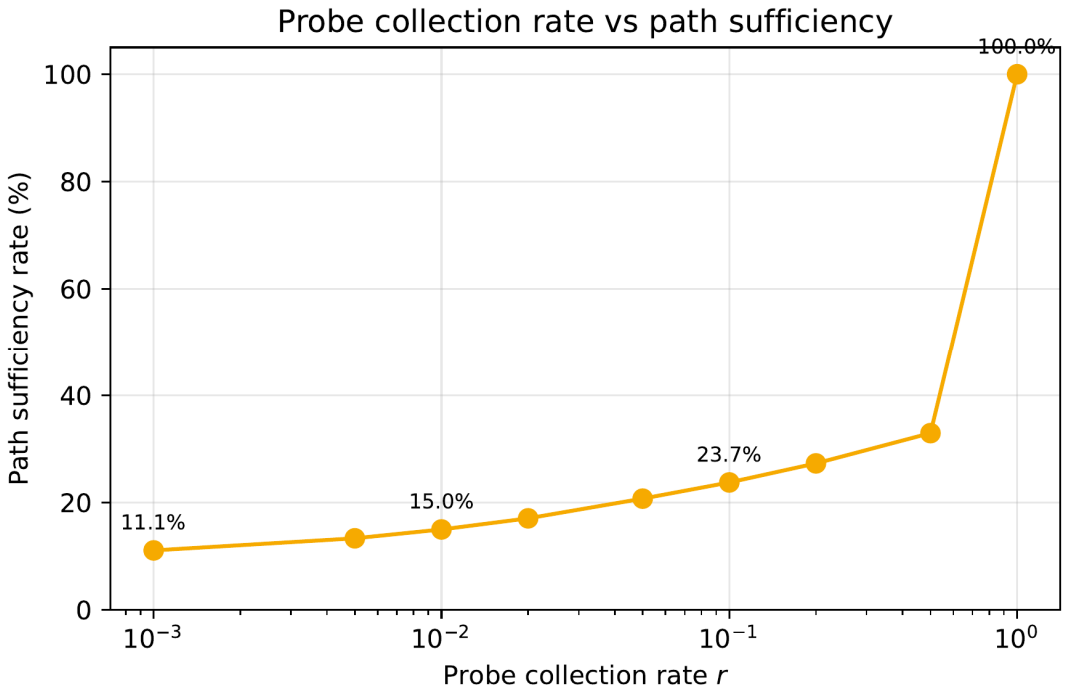


図 5.2　プローブ回収率 r と経路充足率の関係

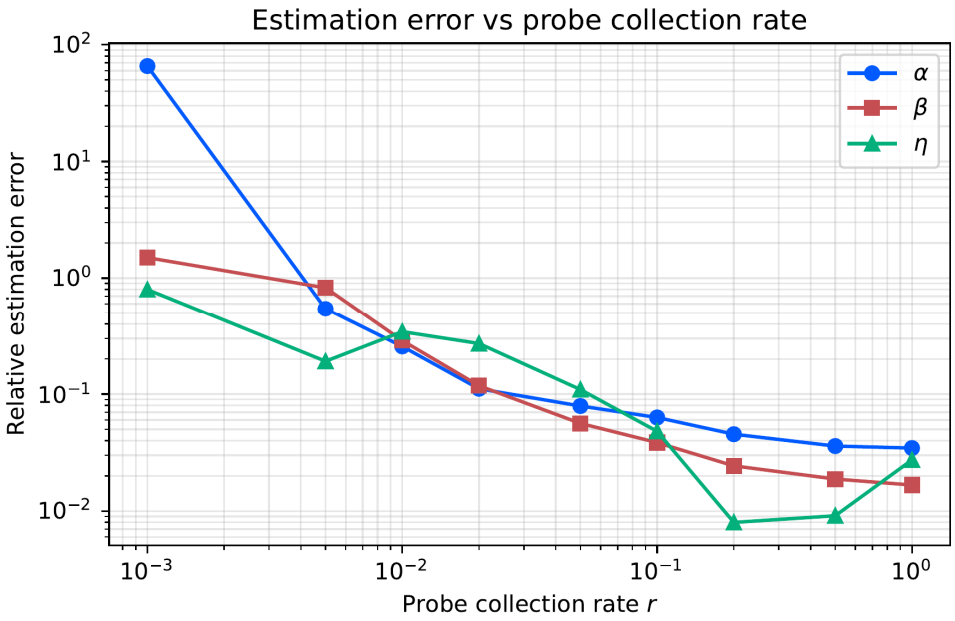


図 5.3　プローブ回収率 r とパラメータ推定の相対誤差

5.3　推定結果と実用目安

5.3.1　プローブ回収率ごとの推定精度

各プローブ回収率 r に対し，以下の手順で推定を行った：

1．式(32)に基づく経路発見シミュレーション．
2．ペナルティ付き ME 問題(31)の求解による経路フロー復元．
3．復元された経路フローを観測データとして $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定．

推定結果は表 5.1 に示すとおりである．プローブ回収率 $r \geq 5\%$ で α, β の相対誤差は 8% 以下，$r \geq 10\%$ で全パラメータの相対誤差が 6.5% 程度以下，$r \geq 20\%$ で 5% 程度以下となる．η の推定誤差は $r = 0.01$ から 0.10 にかけて急速に低下し，$\varepsilon_\eta = 0.343$ から 0.048 にまで減少する．

パラメータごとに経路集合の不完全性への感度が異なる．回収率 $r = 0.01 \sim 0.05$ では，η の推定誤差が α, β のそれを上回る．α, β はポテンシャル関数 $g(\boldsymbol{y})$ の勾配（リンクフロー $\boldsymbol{y}$ の情報）から推定され，集計リンクフローは完全に観測されるため，経路集合が不十分でもペナルティ付き ME 問題がリンクフローを近似的に再現する限り推定できる．一方，η はエントロピー項の勾配（経路フローの分布 $f_k \ln f_k$ の和）から推定されるため，この範囲では経路集合の不完全性の影響をより強く受ける．

プローブ回収率 r に対するパラメータ推定の相対誤差を図 5.3 に，回収率 r ごとの推定

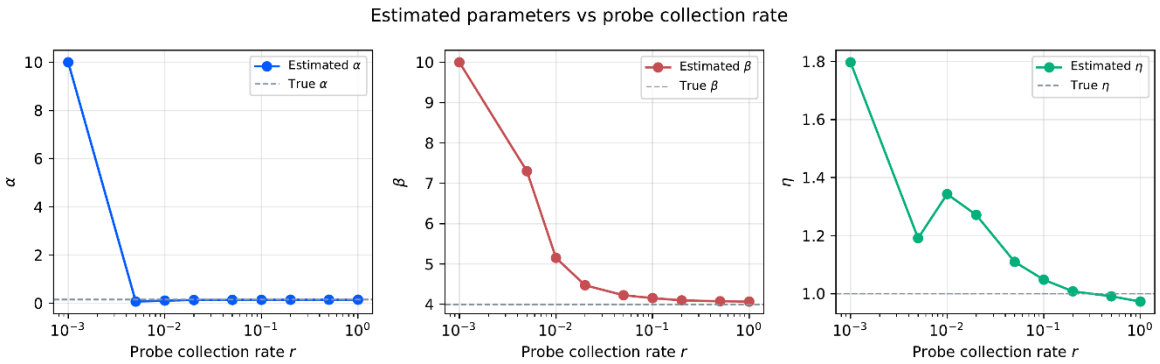


図 5.4　プローブ回収率 r ごとの推定パラメータ値

表 5.2　実用上のプローブ回収率目安（ε_θ は(20)の相対誤差）

推定目標	必要回収率	充足率	$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$	ε_η
α, β のみ	$r \geq 5\%$	$\approx 20\%$	< 0.08	—
全パラメータ	$r \geq 10\%$	$\approx 23\%$	< 0.065	< 0.05
高回収率	$r \geq 50\%$	$\approx 33\%$	< 0.04	< 0.03

パラメータ値を図 5.4 に示す．r の増加に伴い，α, β は単調に真値に近づく．η も概ね真値に近づくが，単調ではない．

なお，$r = 1.0$（完全な経路集合）の場合でも推定誤差はゼロではない（$\varepsilon_\alpha = 3.46 \times 10^{-2}$，$\varepsilon_\beta = 1.67 \times 10^{-2}$，$\varepsilon_\eta = 2.74 \times 10^{-2}$）．これは第 3.3 節の完全データ実験（$\varepsilon \sim 10^{-5}$）と比較して大きく，ME ソルバの有限精度に起因すると考えられる「ベースライン誤差」である．$r \geq 0.2$ では α, β の推定誤差が $r = 1.0$ の水準に近づいており，データの不完全性よりも前処理の精度が支配的となっている．

5.3.2　実用上必要なプローブ回収率の目安

表 5.1 の結果に基づき，実用上必要なプローブ回収率の目安を表 5.2 にまとめる．

現在の実務環境との対応：

- **ETC 2.0 プローブ**
  装着率は道路種別・地域によって大きく異なるが，装着率が比較的高い高速道路区間などでは全パラメータの実用的推定が可能な水準に達していると考えられる．一方，装着率の低い一般道や地方部では他のプローブデータとの組合せや，経路集合の充足を補う追加情報が必要となる．

- **商用プローブ（タクシー等）**
  回収率は数%程度であるが，α, β の推定に足りる可能性がある．
- **コネクテッドカー**
  将来的には回収率の大幅な向上が見込まれる．

これらの結果は，現行のプローブ技術が構造推定に必要な水準のデータを提供しうる可能性を示唆している．

6章　おわりに

本研究では，旅行者の経路選択をポテンシャルゲームとして定式化し，確率進化動学に基づく尤度関数を構成することで，交通ネットワークにおける混雑外部性を評価する構造推定アプローチを提示した．主要な知見を以下にまとめる：

1．**効率的かつ精度の高い推定**

ポテンシャル関数を利用した推定法により，計算困難であった正規化定数の計算を要しない推定を実現した．さらに，完全データでは BPR パラメータ α, β および分散パラメータ η を相対誤差 5×10^{-5} 以下で回復できることを確認した．

2．**ME 前処理の理論的整合性**

エントロピー最大化による経路フロー復元が拡張ポテンシャル関数最大化問題の条件付き最適化と等価であり，かつこの復元が η に依存しないことを示した．これにより，経路集合が完全である限り，前処理と推定を分離できる．

3．**プローブ回収率と推定精度**

Sioux Falls ネットワーク上の数値実験により，$r \geq 0.05$（5%）で α, β の相対誤差 8% 以下，$r \geq 0.1$（10%）で全パラメータの相対誤差 6.5% 以下の推定が可能であることを示した．高フロー経路ほど優先的に発見されるため，最短経路を常に既知とする本実験の設定のもとでは，経路充足率 15%（$r = 0.01$）でも発見経路が運ぶフロー比率は 96% に達する．特に回収率 1〜5% では，リンクフロー情報から推定される α, β に比べ，エントロピー情報から推定される η の誤差が大きい．また，完全な経路集合でも前処理に起因する数%の誤差が残る．現行の ETC 2.0 プローブは装着率，したがって回収率が比較的高い区間においてこの水準を満たす可能性がある．

4．**混雑料金の効率性**

推定パラメータに基づく混雑料金は，いずれのブートストラップ標本でも総旅行費用を低減し（平均低減率 3.62%），真値による料金（変化率 $R^* = -3.6235\%$）とほぼ同等の効率改善を安定的にもたらす．

これらの結果は，混雑料金政策の効率性を高める正確かつ実用的な推定手法の構築に資すると考えられる．本研究は人工データによる検証にとどまるが，固定型交通量検知器やプローブ車両から得られる実データへの適用に向けた基盤を与える．実ネットワークへの適用を

通じた多様な現実条件下での妥当性検証や，大規模な混雑料金最適化への展開が今後の課題である．

付録 A　データの詳細

Transportation Networks for Research Core Team（最終アクセス：2024 年 9 月 22 日）が提供する Sioux Falls ネットワークデータの詳細を表 A.1，A.2，A.3 に示す．表 A.1 の容量 μ_{ij} は元データの値である．数値実験では，この値を一律に 1.911 倍したものを式(13) の容量として用いた．

表 A.1　Sioux Falls ネットワークのリンク情報

リンク ID	起点	終点	μ_{ij}	$\bar{t}_{ij}$	リンク ID	起点	終点	μ_{ij}	$\bar{t}_{ij}$
0	1	2	25900.200	6	38	13	24	5091.256	4
1	1	3	23403.470	4	39	14	11	4876.508	4
2	2	1	25900.200	6	40	14	15	5127.526	5
3	2	6	4958.181	5	41	14	23	4924.791	4
4	3	1	23403.470	4	42	15	10	13512.000	6
5	3	4	17110.520	4	43	15	14	5127.526	5
6	3	12	23403.470	4	44	15	19	14564.75	3
7	4	3	17110.520	4	45	15	22	9599.181	3
8	4	5	17782.790	2	46	16	8	5045.823	5
9	4	11	4908.827	6	47	16	10	4854.918	4
10	5	4	17782.790	2	48	16	17	5229.910	2
11	5	6	4947.995	4	49	16	18	19679.900	3
12	5	9	10000.000	5	50	17	10	4993.511	8
13	6	2	4958.181	5	51	17	16	5229.910	2
14	6	5	4947.995	4	52	17	19	4823.951	2
15	6	8	4898.588	2	53	18	7	23403.470	2
16	7	8	7841.811	3	54	18	16	19679.900	3
17	7	18	23403.470	2	55	18	20	23403.470	4
18	8	6	4898.588	2	56	19	15	14564.750	3
19	8	7	7841.811	3	57	19	17	4823.951	2
20	8	9	5050.193	10	58	19	20	5002.608	4
21	8	16	5045.823	5	59	20	18	23403.470	4

リンク ID	起点	終点	μ_{ij}	$\bar{t}_{ij}$	リンク ID	起点	終点	μ_{ij}	$\bar{t}_{ij}$
22	9	5	10000.000	5	60	20	19	5002.608	4
23	9	8	5050.193	10	61	20	21	5059.912	6
24	9	10	13915.790	3	62	20	22	5075.697	5
25	10	9	13915.790	3	63	21	20	5059.912	6
26	10	11	10000.000	5	64	21	22	5229.910	2
27	10	15	13512.000	6	65	21	24	4885.358	3
28	10	16	4854.918	4	66	22	15	9599.181	3
29	10	17	4993.511	8	67	22	20	5075.697	5
30	11	4	4908.827	6	68	22	21	5229.910	2
31	11	10	10000.000	5	69	22	23	5000.000	4
32	11	12	4908.827	6	70	23	14	4924.791	4
33	11	14	4876.508	4	71	23	22	5000.000	4
34	12	3	23403.470	4	72	23	24	5078.508	2
35	12	11	4908.827	6	73	24	13	5091.256	4
36	12	13	25900.200	3	74	24	21	4885.358	3
37	13	12	25900.200	3	75	24	23	5078.508	2

表 A.2　Sioux Falls ネットワークの OD 需要 $\{Q^{rs}\}$（終点ノード 1-12）

起点＼終点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	100	100	500	200	300	500	800	500	1300	500	200
2	100	0	100	200	100	400	200	400	200	600	200	100
3	100	100	0	200	100	300	100	200	100	300	300	200
4	500	200	200	0	500	400	400	700	700	1200	1400	600
5	200	100	100	500	0	200	200	500	800	1000	500	200
6	300	400	300	400	200	0	400	800	400	800	400	200
7	500	200	100	400	200	400	0	1000	600	1900	500	700
8	800	400	200	700	500	800	1000	0	800	1600	800	600
9	500	200	100	700	800	400	600	800	0	2800	1400	600
10	1300	600	300	1200	1000	800	1900	1600	2800	0	4000	2000
11	500	200	300	1500	500	400	500	800	1400	3900	0	1400
12	200	100	200	600	200	200	700	600	600	2000	1400	0
13	500	300	100	600	200	200	400	600	600	1900	1000	1300
14	300	100	100	500	100	100	200	400	600	2100	1600	700
15	500	100	100	500	200	200	500	600	1000	4000	1400	700
16	500	400	200	800	500	900	1400	2200	1400	4400	1400	700
17	400	200	100	500	200	500	1000	1400	900	3900	1000	600
18	100	0	0	100	0	100	200	300	200	700	200	200
19	300	100	0	200	100	200	400	700	400	1800	400	300
20	300	100	0	300	100	300	500	900	600	2500	600	500
21	100	0	0	200	100	100	200	400	300	1200	400	300
22	400	100	100	400	200	200	500	500	700	2600	1100	700
23	300	0	100	500	100	100	200	300	500	1800	1300	700
24	100	0	0	200	0	100	100	200	200	800	600	500

表 A.3 Sioux Falls ネットワークの OD 需要 $\{Q^{rs}\}$（終点ノード 13-24）

起点＼終点	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	500	300	500	500	400	100	300	300	100	400	300	100
2	300	100	100	400	200	0	100	100	0	100	0	0
3	100	100	100	200	100	0	0	0	0	100	100	0
4	600	500	500	800	500	100	200	300	200	400	500	200
5	200	100	200	500	200	0	100	100	100	200	100	0
6	200	100	200	900	500	100	200	300	100	200	100	100
7	400	200	500	1400	1000	200	400	500	200	500	200	100
8	600	400	600	2200	1400	300	700	900	400	500	300	200
9	600	600	900	1400	900	200	400	600	300	700	500	200
10	1900	2100	4000	4400	3900	700	1800	2500	1200	2600	1800	800
11	1000	1600	1400	1400	1000	100	400	600	400	1100	1300	600
12	1300	700	700	700	600	200	300	400	300	700	700	500
13	0	600	700	600	500	100	300	600	600	1300	800	800
14	600	0	1300	700	700	100	300	500	400	1200	1100	400
15	700	1300	0	1200	1500	200	800	1100	800	2600	1000	400
16	600	700	1200	0	2800	500	1300	1600	600	1200	500	300
17	500	700	1500	2800	0	600	1700	1700	600	1700	600	300
18	100	100	200	500	600	0	300	400	100	300	100	0
19	300	300	800	1300	1700	300	0	1200	400	1200	300	100
20	600	500	1100	1600	1700	400	1200	0	1200	2400	700	400
21	600	400	800	600	600	100	400	1200	0	1800	700	500
22	1300	1200	2600	1200	1700	300	1200	2400	1800	0	2100	1100
23	800	1100	1000	500	600	100	300	700	700	2100	0	700
24	700	400	400	300	300	0	100	400	500	1100	700	0

＜参考文献＞

1) Allen, Treb, and Costas Arkolakis. 2022. “The Welfare Effects of Transportation Infrastructure Improvements.” *The Review of Economic Studies* 89 (6): 2911–57.
2) Almagro, Milena, Felipe Barbieri, Juan Camilo Castillo, Nathaniel G. Hickok, and Tobias Salz. 2024. “Optimal Urban Transportation Policy: Evidence from Chicago.” *NBER Working Paper* 32185.
3) Durrmeyer, Isis, and Nicolas Martinez. 2022. “The Welfare Consequences of Urban Traffic Regulations.” *TSE Working Paper* 22-1315.
4) Fajgelbaum, Pablo D., and Edouard Schaal. 2020. “Optimal Transport Networks in Spatial Equilibrium.” *Econometrica* 88 (4): 1411–52.
5) Hsieh, Chih-Sheng, Michael D. König, and Xiaodong Liu. 2022. “A Structural Model for the Coevolution of Networks and Behavior.” *The Review of Economics and Statistics* 104 (2): 355–67.
6) Mele, Angelo. 2017. “A Structural Model of Dense Network Formation.” *Econometrica* 85 (3): 825–50.
7) Monderer, Dov, and Lloyd S. Shapley. 1996. “Potential Games.” *Games and Economic Behavior* 14 (1): 124–43.
8) Nakajima, Ryo. 2007. “Measuring Peer Effects on Youth Smoking Behaviour.” *The Review of Economic Studies* 74 (3): 897–935.
9) Rosenthal, Robert W. 1973. “A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria.” *International Journal of Game Theory* 2 (1): 65–67.
10) Sandholm, William H. 2001. “Potential Games with Continuous Player Sets.” *Journal of Economic Theory* 97 (1): 81–108.
11) Sandholm, William H. 2010. *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press.
12) Sandholm, William H. 2015. “Population Games and Deterministic Evolutionary Dynamics.” In *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, edited by H Peyton Young and Shmuel Zamir, vol. 4. Elsevier B.V.
13) Sheffi, Yosef. 1985. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
14) Small, Kenneth A., Erik T. Verhoef, and Robin Lindsey. 2024. *The Economics of Urban Transportation*. 3rd ed. London: Routledge.
15) Transportation Networks for Research Core Team. 2024. *Transportation Networks for Research*. https://github.com/bstabler/TransportationNetworks （最終アクセス: 2024 年 9 月 22 日）.
16) U.S. Bureau of Public Roads. 1964. *Traffic Assignment Manual*. U.S. Department of Commerce, Washington, D.C.
17) Viauroux, Christelle. 2011. “Pricing Urban Congestion: A Structural Random Utility Model with Traffic Anticipation.” *European Economic Review* 55 (7): 877–902.

日交研シリーズ目録は、日交研ホームページ
https://www.nikkoken.or.jp/publication_A.html を参照してください

A-942　道路ネットワークにおける混雑外部性の定量化：
確率的進化ゲームモデルを用いた構造推定アプローチ

空間経済学による経済活動の立地と交通の諸問題の
研究プロジェクト

2026 年 10 月　発行

公益社団法人日本交通政策研究会